Algebra III - Abstraktna algebra, 16.02.2017.

1. (a) Pokaži, da je množica $\mathcal{A} = \{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$ zaprta za operacijo (običajnega) matričnega množenja. Ali je operacija matričnega množenja komutativna na množici $\mathcal{A}$? Ali ima vsak element iz množice $\mathcal{A}$ inverz? Odgovore utemelji!

(b) Dana je polgrupa $(\{f : \mathbb{R} \to [0,1]\}, \circ)$. Poišči leve in desne enote v tej polgrupi. (Spomnimo se: Za $(M, \circ)$ rečemo, da je polgrupa, če je operacija $\circ$ zaprta in asociativna.)

Re.

(a) je zaprta, ni komutativna, inverz je $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$.

(b) Leva identiteta je $e(x) = \begin{cases} x & \text{če } \ x \in [0,1], \\ 1 & \text{če } \ x \in \mathbb{R} \backslash [0,1]. \end{cases}$

Polgrupa nima desne identitete.

2. Naj bosta A in B končni ciklični grupi, za kateri velja $|A| = n$ in $|B| = m$.

(a) Če je $n = 2$ in $m = 3$ pokaži, da je $A \times B$ ciklična grupa.

(b) Če je $n = 2$ in $m = 2$ pokaži, da $A \times B$ ni ciklična grupa.

(c) Ali je $A \times B$ ciklična, če je $n = 4$ in $m = 6$?

Re. lahko uporabimo izrek $|(a, b)| = \mathrm{lcm}(|a|, |b|)$.

(a) $|A| = 2 \Rightarrow \exists a \in A$ t.d. $|a| = 2$; $|B| = 2 \Rightarrow \exists b \in B$ t.d. $|b| = 3$;... $A \times B = \langle (a, b) \rangle$.

(b) $\forall (a, b) \in A \times B$ imamo $|(a, b)| \leq 2$; ni ciklična

(c) $\forall (a, b) \in A \times B$ imamo $|(a, b)| \leq 12$; ni ciklična

3. Naj bo dana grupa $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ za operacijo množenja kompleksnih števil in podmnožica $H = \{1, -1\} \subseteq G$. Pokaži, da je H podgrupa edinka v G in da velja $G/H \cong G$.

Re. $zHz^{-1} = z\{1, -1\}z^{-1} = H$; Definirajmo $\phi : G \to G$ t.d. $\phi(z) = z^2$. Potem za $\forall x \in G$ $\phi(x) \in G$, ϕ je homomorfizem, $\phi(G) = G$ in $\ker(\phi) = H$. Zdaj uporabimo prvi izrek o izomorfizmu.

4. Pokaži, da mora grupa reda 63 vsebovati element reda 3.

(a) Z uporabo Cauchy-evega izreka.

(b) Brez uporabe Cauchy-evega izreka ali izreka Sylowa.

Re.

(b) Naj bo G dana grupa, $|G| = 63$. Lagrangeov izrek $\Rightarrow$ če je $a \in G$ potem $|a| \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Prvo moramo pokazati, da $G \backslash \{e\}$ ima najmanjše en element, ki ni reda 7...

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`